數學傳播 50卷2期, pp. 142-152

三度空間極座標與正多面體解析

劉任昌

歐基里德 (Euclid, 325∼265 B.C.)《幾何原本》(Elements) 被後人闡述、翻譯成諸多版本, 其中的第 13 冊 (末冊) 英文版本開宗明義的註釋 (scholium): 後文 (本書) 所謂柏拉圖立體 (Platonic solids) 的稱呼不正確, 因爲正四面體 (tetrahedron)、正六面體 (cube) 與正十二面體 (dodecahedron) 應該歸功於畢達哥拉斯學派 (the Pythagoreans), 正八面體 (octahedron) 與正二十面體 (icosahedron) 則歸功於泰阿泰德 (Theaetetus, 417∼369 B.C.)。

正多面體 (regular polyhedron) 被稱爲「柏拉圖立體」的原因是: 柏拉圖 (Plato, 427∼347 B.C.)《對話錄》(Timaeus) 利用五個正多面體解釋宇宙的構成[1], 即《數學傳播》曾提及的「正多面體只有五種的『天意』」(彭君智, 2001) [7]。《數學傳播》尚有多篇關於正二十面體文章 [5, 8, 12], 但不曾提及後人對「柏拉圖立體」的評論, 更不曾討論正多面體內切球 (insphere)、外接球 (circumsphere) 或頂點座標的解析。本文利用三度空間極座標技巧, 系統性地對內切球半徑 1 的正多面體, 解析正多面體頂點座標、邊長與外接球半徑[2], 參見表 1。

表 1: 解析內切球半徑 1 的正多面體

面體	四	六	八	十二	二十
外接球半徑	3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{15-6\sqrt{5}}$	$\sqrt{15-6\sqrt{5}}$
正多面體邊長	$2\sqrt{6}$	2	$\sqrt{6}$	$\sqrt{50-22\sqrt{5}}$	$3\sqrt{3}-\sqrt{15}$
本文式子	式(5)	式 (9)	式 (10)	式 (17)	式 (21)

1. 三度空間極座標

三度空間極座標 (3-dimensional polar coordinate) 又稱球座標 (sphere coordinate),

[1]以上, 筆者翻譯自 Eves (1976)《數學史》第 73 頁 [1]。參見康明昌 (2008) [6] 以及本文附錄說明。

[2]筆者分享過二篇文章 (1997, 2001) 於《數學傳播》[10, 11], 純粹因爲樂趣使然, 再發表此文。初稿假設正多面體邊長 1, 感謝評審耐心閱讀初稿, 且建議更改爲假設內切球半徑 1, 整合論述架構。

由徑距 (radius)、極角 (polar angle) 與方位角 (azimuth angle) 構成。極角 $\phi \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 又稱傾斜 (inclination) 角, 相當於地球南極與北極之間的緯度 (latitude), 方位角 $\theta \in [0, 2\pi)$ 相當於沿著東西方向, 繞行地球所經過的經度 (longitude)。

參見圖 1 舉例: 直角座標點 $A(0,0,1)$ 對應至極座標徑距 1、$\phi = \frac{\pi}{2}$ 與任意數 θ。直角座標點 $B(\cos\phi, 0, \sin\phi)$ 對應至極座標徑距 1、ϕ 與 $\theta = 0$。直角座標點
$C(\rho\cos\phi\cos\theta, \rho\cos\phi\sin\theta, \rho\sin\phi)$ 則是通式。

以下假設內切球半徑 1 的正多面體中心位於原點 $O(0,0,0)$, 外接球半徑 (正多面體中心至任意角距離) 係未知的變數 ρ, 正多面體頂點之一固定於Z軸, 形成直角座標 $A(0,0,\rho)$, 另一頂點 B 固定於 XZ 平面 $(y=0)$, 形成 $B(\rho\cos\phi, 0, \rho\sin\phi)$。當正多面體的 O, A, B 三點座標固定, 則其他各頂點座標被唯一決定, 因此求得各頂點的座標與角度等性質。

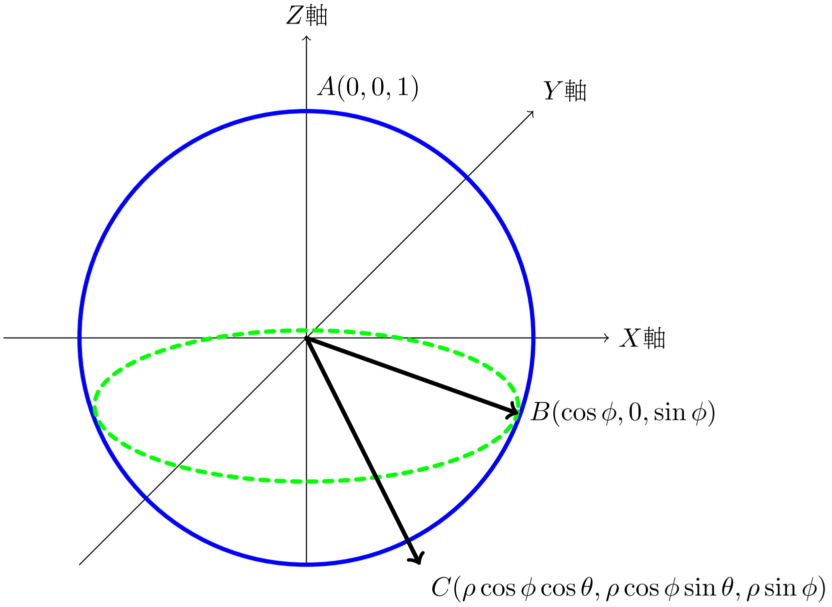

圖 1: 三度空間極座標

2. 正四面體

內切球半徑 1 的正四面體頂點 $\{A, B, C, D\}$ 如圖 2 與圖 3 呈現, 頂點座標:

$$A(0,0,\rho),$$

$$B(\rho\cos\phi, 0, \rho\sin\phi),$$

$$C(\rho\cos\phi\cos\frac{2\pi}{3}, \rho\cos\phi\sin\frac{2\pi}{3}, \rho\sin\phi),$$

$$D(\rho\cos\phi\cos\frac{4\pi}{3},\rho\cos\phi\sin\frac{4\pi}{3},\rho\sin\phi).$$

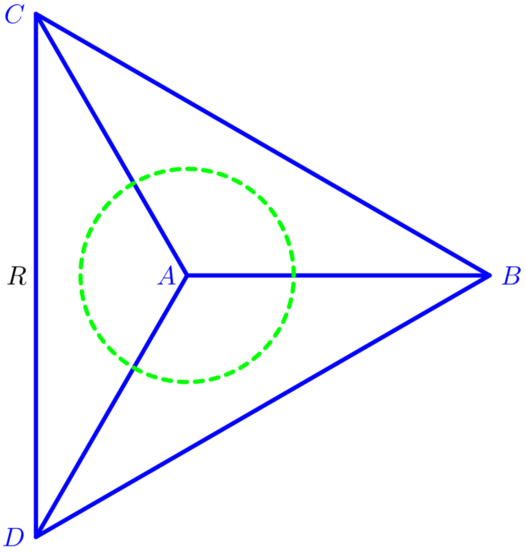

圖 2: 正四面體俯視圖

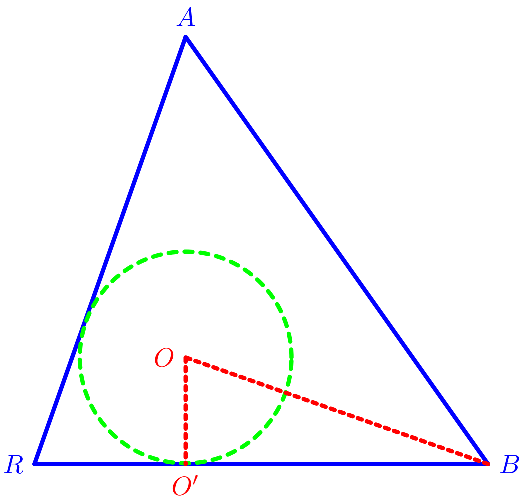

圖 3: 正四面體前視圖

點 B,C,D 位於同一平面, 且共有極角 $\phi<0$, 接續求取邊長平方:

$$\overline{AB}^2=\rho^2\cos^2\phi+\rho^2(1-\sin\phi)^2=2\rho^2(1-\sin\phi), \quad (1)$$

$$\overline{BC}^2=\rho^2\cos^2\phi(1-\cos\frac{2\pi}{3})^2+\rho^2\cos^2\phi\sin^2\frac{2\pi}{3}=3\rho^2(1-\sin^2\phi); \quad (2)$$

以上導因於 $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ 與 $\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$。將式 (2) 除以式 (1) 得

$$1=\frac{3}{2}(1+\sin\phi)\Rightarrow\sin\phi=-\frac{1}{3}. \tag{3}$$

將式 (3) 代入式 (1), 得到正四面體邊長平方

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\frac{8}{3}\rho^2. \tag{4}$$

接續觀察圖 3 的直角 $\Delta OO'B$, 內切球半徑 $\overline{OO'}=1$、外接球半徑 $\overline{OB}=\rho$, $\overline{BO'}=\frac{2}{3}\times\overline{RB}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AB}$, 後者是導因於式 (4) 與三角形重心性質。再利用畢氏定理, 得到外接球半徑

$$\rho^2=1+\frac{8}{9}\rho^2\Rightarrow\rho=3. \tag{5}$$

回到式 (4), 得到四面體邊長 $\overline{AB}=2\sqrt{6}$。

3. 正六面體

內切球半徑 1 的正六面體 (正方體) 有 8 個頂點 $\{A,\ldots,H\}$:

$$A(0,0,\rho),\ H(0,0,-\rho),$$

$$B(\rho\cos\phi,0,\rho\sin\phi),\ G(-\rho\cos\phi,0,-\rho\sin\phi),$$

$$C(\rho\cos\phi\cos\frac{2\pi}{3},\rho\cos\phi\sin\frac{2\pi}{3},\rho\sin\phi),\ E(\rho\cos\phi\cos\frac{\pi}{3},-\rho\cos\phi\sin\frac{\pi}{3},-\rho\sin\phi),$$

$$D(\rho\cos\phi\cos\frac{4\pi}{3},\rho\cos\phi\sin\frac{4\pi}{3},\rho\sin\phi),\ F(\rho\cos\phi\cos\frac{\pi}{3},\rho\cos\phi\sin\frac{\pi}{3},-\rho\sin\phi).$$

類似式 (1) 與 (2) 過程, 得到

$$\overline{AB}^2=\rho^2\cos^2\phi+\rho^2(1-\sin\phi)^2=2\rho^2(1-\sin\phi), \tag{6}$$

$$\overline{BC}^2=\rho^2\cos^2\phi(1-\cos\frac{2\pi}{3})^2+\rho^2\cos^2\phi\sin^2\frac{2\pi}{3}=3\rho^2\cos^2\phi. \tag{7}$$

接續將式 (7) 除以式 (6), 則

$$2=\frac{3}{2}(1+\sin\phi)\Rightarrow\sin\phi=\frac{1}{3}. \tag{8}$$

如圖 5 顯示: 正六面體邊長等於內切球直徑, 再將式 (8) 代入式 (6), 得到正六面體外接球半徑:

$$\overline{AB}^2=\frac{4}{3}\rho^2=4\Rightarrow\rho=\sqrt{3}. \tag{9}$$

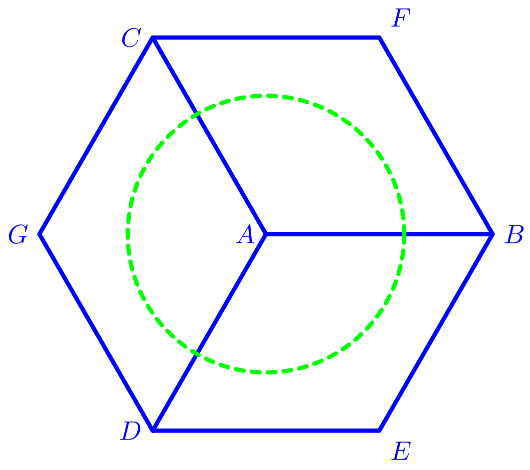

圖 4: 正六面體俯視圖

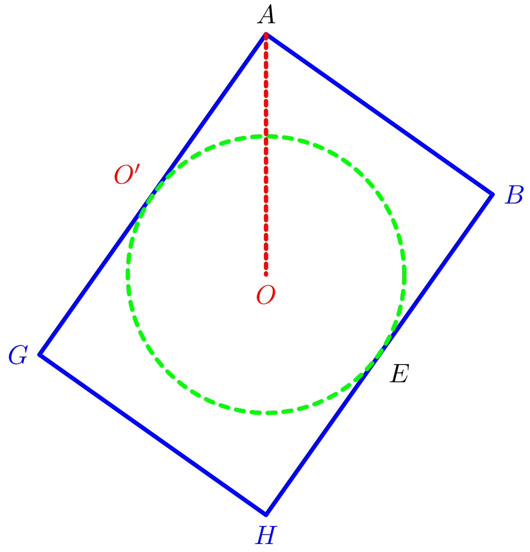

圖 5: 正六面體前視圖

4. 正八面體

內切球半徑 1 的正八面體有 6 個頂點 $\{A,\ldots,F\}$, 如圖 6 顯示:

$$A(0,0,\rho),\quad F(0,0,-\rho),$$

$$B(\rho,0,0),\quad D(-\rho,0,0),$$

$$C(0,\rho,0),\quad E(0,-\rho,0).$$

觀察等腰直角 ΔAOD 與直角 $\Delta AOO'$, 其中點 O' 是正 ΔACD 中心。內切球半徑

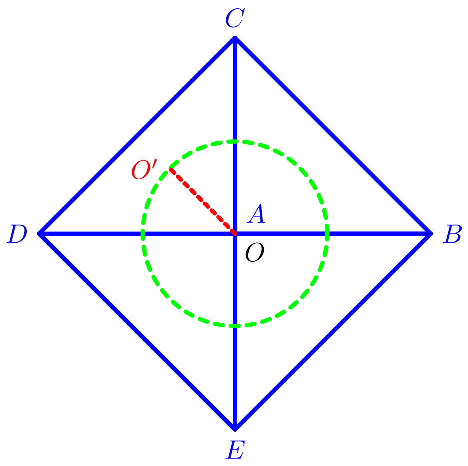

圖 6: 正八面體俯視圖與前視圖(點標示(C, A, E)被(A, E, F)取代)

$\overline{OO'} = 1$、外接球半徑 $\overline{OA} = \overline{OD} = \rho$, 則多面體邊長 $\overline{AD} = \sqrt{2}\rho$。正 ΔACD 中心 O' 性質, 則 $\overline{AO'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho$, 再套用畢氏定理於直角 $\Delta AOO'$, 則

$$\rho^2 = 1 + \frac{2}{3}\rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{3}. \tag{10}$$

5. 正十二面體

內切球半徑 1 的正十二面體有 20 個頂點 $\{A, \cdots, U\}$, 其中的 8 個設定爲:

$$A(0, 0, \rho), \quad U(0, 0, -\rho),$$

$$B(\rho\cos\phi, 0, \rho\sin\phi), \quad S(-\rho\cos\phi, 0, -\rho\sin\phi),$$

$$C(\rho\cos\phi\cos\frac{2\pi}{3}, \rho\cos\phi\sin\frac{2\pi}{3}, \rho\sin\phi), \quad T(\rho\cos\phi\cos\frac{\pi}{3}, -\rho\cos\phi\sin\frac{\pi}{3}, -\rho\sin\phi),$$

$$D(\rho\cos\phi\cos\frac{4\pi}{3}, \rho\cos\phi\sin\frac{4\pi}{3}, \rho\sin\phi), \quad R(\rho\cos\phi\cos\frac{\pi}{3}, \rho\cos\phi\sin\frac{\pi}{3}, -\rho\sin\phi).$$

對照圖 7 與圖 8, 極角等於 ϕ 者 $\{B, C, D\}$, 等於 $-\phi$ 者 $\{R, S, T\}$。類似於式 (1) 與 (2) 的處理過程, 得到

$$\overline{AB}^2 = \rho^2\cos^2\phi + \rho^2(1-\sin\phi)^2 = 2\rho^2(1-\sin\phi), \tag{11}$$

$$\overline{BC}^2 = \rho^2\cos^2\phi(1-\cos\frac{2\pi}{3}^2 + \rho^2\cos^2\phi\sin^2\frac{2\pi}{3} = 3\rho^2\cos^2\phi. \tag{12}$$

將式 (12) 除以式 (11) 得

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 \times \frac{3}{2}(1+\sin\phi). \tag{13}$$

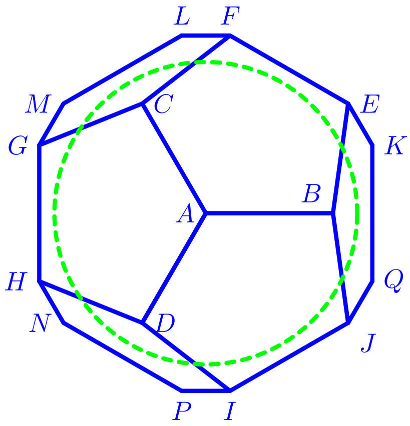

圖 7: 正十二面體俯視圖

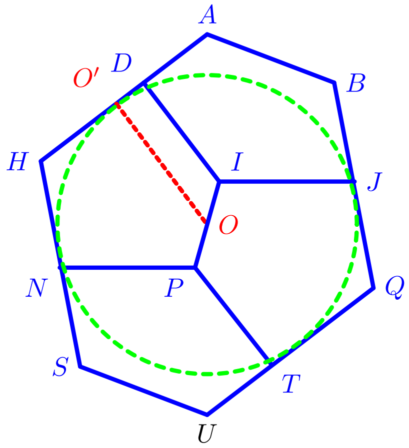

圖 8: 正十二面體前視圖

觀察正五邊形 $ABEFC$ 的 $\angle ABC=\angle ACB=\pi/5$ 與 $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 則

$$\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{5}\Rightarrow\overline{BC}^2=\overline{AB}^2\times\frac{3+\sqrt{5}}{2}. \tag{14}$$

式 (14) 除以式 (13) 則

$$\frac{3}{2}(1+\sin\phi)=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\sin\phi=\frac{\sqrt{5}}{3}. \tag{15}$$

觀察圖 8 的直角 $\Delta AOO'$, 其中點 O' 是正五邊形 $ACGHD$ 的中心, 內切球半徑 $\overline{OO'}=1$、外接球半徑 $\overline{AO}=\rho$、角 $\angle CAO'=\frac{3\pi}{10}$ 與 $\overline{AC}=\overline{AB}$, 則

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AO'}\times\cos\frac{3\pi}{10}\Rightarrow\overline{AO'}=\overline{AB}\times\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}. \tag{16}$$

類似於式 (5) 的套用畢氏定理於直角 $\Delta AOO'$, 且利用式 (11)、(15) 與 (16), 則

$$\rho^2 = 1 + \rho^2 \times \frac{6-2\sqrt{5}}{3} \times \frac{4}{10-2\sqrt{5}} \Rightarrow \rho = \sqrt{15-6\sqrt{5}}. \tag{17}$$

將式 (15) 與 (17) 代回 (11), 得到正十二面體邊長:

$$\overline{AB}^2 = 2(15-6\sqrt{5})(1-\frac{\sqrt{5}}{3}) = 50-22\sqrt{5} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{50-22\sqrt{5}}.$$

6. 正二十面體

內切球半徑 1 的正二十面體, 有 12 個頂點 $\{A, \ldots, L\}$, 其中 6 個可設定如此:

$$A(0,0,\rho), \quad L(0,0,-\rho),$$

$$B(\rho\cos\phi, 0, \rho\sin\phi),\ J(-\rho\cos\phi, 0, -\rho\sin\phi),$$

$$C(\rho\cos\phi\cos\frac{2\pi}{5}, \rho\cos\phi\sin\frac{2\pi}{5}, \rho\sin\phi),\ K(-\rho\cos\phi\cos\frac{2\pi}{5}, -\rho\cos\phi\sin\frac{2\pi}{5}, -\rho\sin\phi).$$

圖 9 說明: 方位角之間差 $\frac{2\pi}{5}$。圖 10 說明極角性質: $\angle AOB = \angle LOJ = \frac{\pi}{2} - \phi$, 而且極角等於 ϕ 者 $\{B, C, D, E, F\}$, 極角等於 $-\phi$ 者 $\{G, H, I, J, K\}$。

類似處理正四面體的式 (1) 與 (2), 得到

$$\overline{AB}^2 = \rho^2\cos^2\phi + \rho^2(1-\sin\phi)^2 = 2\rho^2(1-\sin\phi), \tag{18}$$

$$\overline{BC}^2 = \rho^2\cos^2\phi(1-\cos\frac{2\pi}{5})^2 + \rho^2\cos^2\phi\sin^2\frac{2\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}\rho^2\cos^2\phi. \tag{19}$$

式 (19) 導因於 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$。接續將式 (19) 除以式 (18), 則

$$1 = \frac{5-\sqrt{5}}{4}(1+\sin\phi) \Rightarrow \sin\phi = \frac{\sqrt{5}}{5}. \tag{20}$$

觀察圖 10 的直角 $\Delta EOO'$, 其中點 O' 是 ΔDEJ 的中心 (圖 9), 內切球半徑 $\overline{OO'} = 1$、外接球半徑 $\overline{JO} = \rho$ 與 $\overline{JO'} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}$。接續類似於式 (5) 與 (17) 的套用畢氏定理於直角 $\Delta EOO'$, 且利用式 (18) 與 (20), 則

$$\rho^2 = 1 + \frac{2}{3}\rho^2 \times \frac{5-\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \rho^2 = \frac{15}{5+2\sqrt{5}} \Rightarrow \rho = \sqrt{15-6\sqrt{5}}. \tag{21}$$

將式 (20) 與 (21) 代回式 (18), 則正二十面體邊長:

$$\overline{AB}^2 = 2(15-6\sqrt{5}) \times \frac{5-\sqrt{5}}{5} = 3 \times (3-\sqrt{5})^2 \Rightarrow \overline{AB} = 3\sqrt{3} - \sqrt{15}.$$

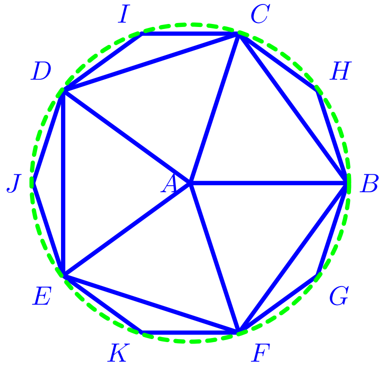

圖 9: 正二十面體俯視圖

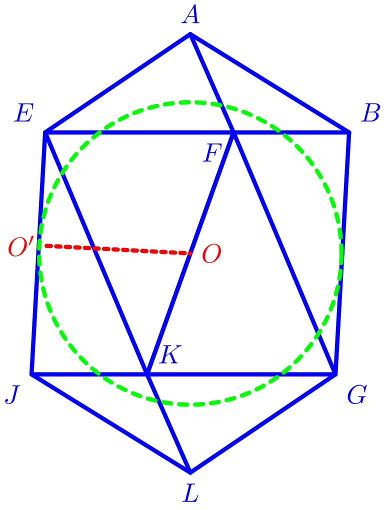

圖 10: 正二十面體前視圖

7. 後記

「幾何之內, 無帝王之路。」歐基里德 2000 多年前留下的名言。

人類發展史上, 當少部分幸運者不再需要整日狩獵、農耕之時, 開始好奇於宇宙、星辰、萬物的運行, 而試圖去理解之, 於是有巫師與巫術的產生; 卻也在同時出現兼具智慧與領導能力的人物, 他們深知供養學者的重要, 於是乎出現了蘇格拉底、柏拉圖、亞里斯多德、孔子、孟子 ⋯ 愛智者的任務是探究與傳遞知識, 由貴族或國王供養。

歐基里德時代的國王深知其中道理, 因此聘請歐基里德到王宮向國王傳授知識, 希望自己也能像柏拉圖等人一樣, 可以成爲一個在歷史留名的學者, 因此有「幾何之內, 無帝王之路。」這句名言。[3]

民主法制時代, 國家取代古時候的王國與貴族, 國家力量讓每個人都有機會去試探追求知

[3]根據文獻, 康熙皇帝也曾聘請學者教導其幾何學、靜力學和天文學的內容。參見張小平 (2014) [9]。

識的快樂。樂在其中者, 則必須反饋到體制、反饋回社會。

人死後, 是否存在靈魂? 我無法證明靈魂的存在, 我也無法否認靈魂的存在, 但我決定跟隨康德 (Kant, 1727～1804) 的信仰: 如果你發現相信上帝與靈魂的存在, 可以讓你現在的生活更好, 那就選擇相信上帝與靈魂的存在。

我死後, 生前所做的一切都歸零! 如果我死後, 發現靈魂永生, 發現我持續看到生前所做所有, 對我死後的社會有正面影響, 我會很慶幸自己生前選擇相信靈魂與永生。以上係我撰寫此文的動機與目的。

附錄

數學史著作 Eves (1976) [1] 與 Merzbach and Boyer (2011) [4] 提及後人對「柏拉圖立體」的評論, 後者更具體的陳述「歐基里德《幾何原本》第 13 卷的一項註釋 (日期不詳) 指出, 五種正多面體中只有三種是畢達哥拉斯學派的功勞, 而正八面體和正二十面體則是透過泰阿泰德才爲人所知。無論如何, 泰阿泰德很可能對五種正多面體進行了最廣泛的研究之一, 而定理『正多面體只有五種』很可能也出自他之手。或許,《幾何原本》中關於 正多面體稜長與其外接球半徑之比 的計算也出自他之手。」[4] 因此, 筆者撰寫此文不過是用另一個角度闡述泰阿泰德的貢獻。

然而,「正八面體和正二十面體是透過泰阿泰德才爲人所知。」[4] 之說令人困惑! 因爲正六面體 (八對稱頂點) 與正八面體 (六對稱頂點) 對偶 (duality)、正十二面體 (二十對稱頂點) 與正二十面體 (十二對稱頂點) 對偶。況且, 正八面體的複雜度低於正十二面體, 不禁讓人懷疑該段「註釋」是否是將「正十二面體」與「正八面體」相互錯置?

Eves [1] 與 Merzbach and Boyer [4] 同時引用 Heath (1908) [3], 該書第 438 頁陳述「歐基里德第 13 卷註釋 1 的作者確實指出, 本書談的是『五種所謂的柏拉圖圖形』, 但它們並非柏拉圖的原創作品。這五種圖形中, 三種是畢達哥拉斯學派的, 即立方體、稜錐和十二面體; 而八面體和二十面體則是泰阿泰德的貢獻。該註釋可能是來自 Geminus ...」[5] 據此, 我們得以結論「正八面體和正二十面體是透過泰阿泰德」之說來自 Heath [3]。

現存《幾何原本》由後人註釋、翻譯的事實, 充分反映於康明昌 [6] 第 17 頁所謂「Clavius 的數學造詣相當高, 他編了一本歐基里德的《幾何原本》(1574 年), 這本書就是利瑪竇與徐光啟中譯本的依據。」可惜「利瑪竇與徐光啟中譯本」僅翻譯十三冊中的前六冊, 我們無法藉此考證 Heath [3] 關於「正八面體和正二十面體是透過泰阿泰德」的正確性。

---

[4] Merzbach and Boyer (2011) [4] 第 76 頁原文:「A scholium (of uncertain date) to Book XIII of Euclid's Elements reports ... it was through Theaetetus that the octahedron and the icosahedron became known.」

[5] 原文:「"the five so-called Platonic figures, ... the octahedron and the icosahedron are due to Theaetetus." This statement (taken probably from Geminus) may perhaps rest on the fact ...」可透過參考文獻 [3] 的連結閱讀原文。

筆者最終搜尋到 Heiberg 拉丁文註釋、Fitzpatrick 翻譯英文的雙語並陳版本 [2], 該書第 505 頁註腳陳述「五種正多面體–立方體、正四面體 (即稜錐)、正八面體、正二十面體和正十二面體–很可能是由畢達哥拉斯學派發現的。它們通常被稱爲『柏拉圖』立體, 因爲它們被強調於柏拉圖的《對話錄》。本書中的許多定理 — 特別是與 最後二種正多面體相關的定理 — 都歸功於雅典的泰阿泰德。」[6] 即「 正二十面體和正十二面體歸功於雅典的泰阿泰德。」的說法確實存在!

參考文獻

1. Eves, H. W., *An Introduction to the History of Mathematics* (4th ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976.
2. Fitzpatrick, R., *Euclid's Elements of Geometry*, (The Greek text of J.L. Heiberg and provided with a modern English translation, by R. Fitzpatrick). `https://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf`.
3. Heath, T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (2nd ed., Vol. 3). New York: Cambridge University Press. `https://www.wilbourhall.org/pdfs/Heath_Euclid_III.pdf`.
4. Merzbach, U. C. and Boyer, C. B., *A History of Mathematics* (3rd ed.). New Jersey: John Wiley & Sons, 2011. `https://www.hlevkin.com/hlevkin/90MathPhysBioBooks/mathHistory/BoyerMerzbach-history-of-mathematics.pdf`.
5. 平斯。柏拉圖的地面。數學傳播季刊, 22(4), 59-64, 1998。
6. 康明昌。「幾何原本」四百年。數學傳播季刊, 32(4), 16-29, 2008。
7. 彭君智。3D 立體變變變。數學傳播季刊, 25(3), 68-80, 2001。
8. 張海潮。在球面上鋪二十個球面正三角形。數學傳播季刊, 33(3), 72-73, 2009。
9. 張小平。康熙皇帝的數學事業。數學傳播季刊, 38(3), 83-92, 2014。
10. 劉任昌。一個 $2n$ (n 爲奇數) 階魔方陣的簡單解法。數學傳播季刊, 21(2), 71-75, 1997。
11. 劉任昌。從平分凸五邊形面積談起。數學傳播季刊, 25(4), 73-78, 2001。
12. 數學傳播季刊。有朋自遠方來: 專訪 Frans Oort 教授(中)。數學傳播季刊, 38(3), 3-11, 2014。

—本文作者任教德明財經科技大學財金系—

[6] 該版本希臘文編者 Heiberg, 英文譯者 Fitzpatrick, 該段英文:「The five regular solids – the cube, tetrahedron (i.e., pyramid), octahedron, **icosahedron**, and **dodecahedron**– were probably discovered by the school of Pythagoras.... Many of the theorems contained in this book–particularly those which pertain to **the last two solids**–are ascribed to Theaetetus of Athens.」除了透過參考文獻 [2] 的連結閱讀原文, 亦有另一獨立機構提供網路版全文: `https://euclid.geometor.com/elements/book-13`.